TABELLE DINAMICHE

- SI TRATTA DI TABELLE SOGGETTE A RIALLOCAZIONE PER RISOLVERE GLI OVERFLOW

- SIA T UNA TABELLA. PONIAMO:

$size[T] =_{def}$ DIMENSIONE DELLA TABELLA

$num[T] =_{def}$ NUMERO DEGLI ELEMENTI IN T

$$\alpha(T) =_{def} \begin{cases} \dfrac{num[T]}{size[T]} & \text{SE } size[T] > 0 \\ 1 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

(FATTORE DI CARICO)

Table-Insert (T, x)

if size[T] = 0 **then**

- si allochi Table[T] di dimensione 1

size[T] := 1

if num[T] = size[T] **then**

- si allochi in new_table una tabella di dim. 2·size[T]
- si copi Table[T] in new_table
- si deallochi Table[T]

Table[T] := new_table

size[T] := 2 * size[T]

- si inserisca x in Table[T]
- num[T] := num[T] + 1

ANALISI DI n INSERIMENTI SU UNA TABELLA INIZIALMENTE NULLA

(I COSTI SONO VALUTATI IN TERMINI DI INSERIMENTI ELEMENTARI)

ANALISI GROSSOLANA

$n = 2^k$ INSERIMENTI

COSTO DELL'INSERIMENTO $(2^{k-1}+1)$-ESIMO $= 2^{k-1}+1$

$= \frac{n}{2}+1$

COSTO DI UN INSERIMENTO $= O(n)$

COSTO DI n INSERIMENTI $= O(n^2)$

METODO DELL'AGGREGAZIONE

	c_i	
INSERIMENTO	COSTO COPIA	COSTO INSERIMENTO
1	/	1
2	1	1
3	2	1
4	/	1
5	4	1
6	/	1
7	/	1
8	/	1
9	8	1
10	/	1
...	...	...

$$c_i = \begin{cases} i & \text{SE } i-1 = 2^k \text{ PER QUALCHE } k \\ 1 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$\boxed{c_i = \begin{cases} i & \text{SE } i-1 = 2^k \\ & \text{PER QUALCHE } k \\ 1 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \left(1 + 2 + \dots + 2^{\lfloor \lg(n-1) \rfloor}\right) + n$$

$$= 2^{\lfloor \lg(n-1) \rfloor + 1} - 1 + n$$

$$\leq 2^{\lg(n-1)+1} - 1 + n$$

$$= 2(n-1) - 1 + n$$

$$= 3n - 3 = O(n)$$

$$\hat{c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{n} \leq \frac{3n-3}{n} = 3 - \frac{3}{n} = O(1)$$

ANALISI CON IL METODO DEGLI ACCANTONAMENTI

$$\hat{c}_{ins} = 3 \begin{cases} \text{1 UNITA' PER IL COSTO REALE} \\ \text{1 UNITA' PER PAGARE IL COSTO DELLA COPIA} \\ \text{1 UNITA' PER PAGARE IL COSTO DELLA COPIA} \\ \text{DI UN ELEMENTO GIA' RICOPIATO} \end{cases}$$

SI OSSERVI CHE:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^{n} c_i$$

PERTANTO

$$T(n) \leq 3n$$

ANALISI CON IL METODO DEL POTENZIALE

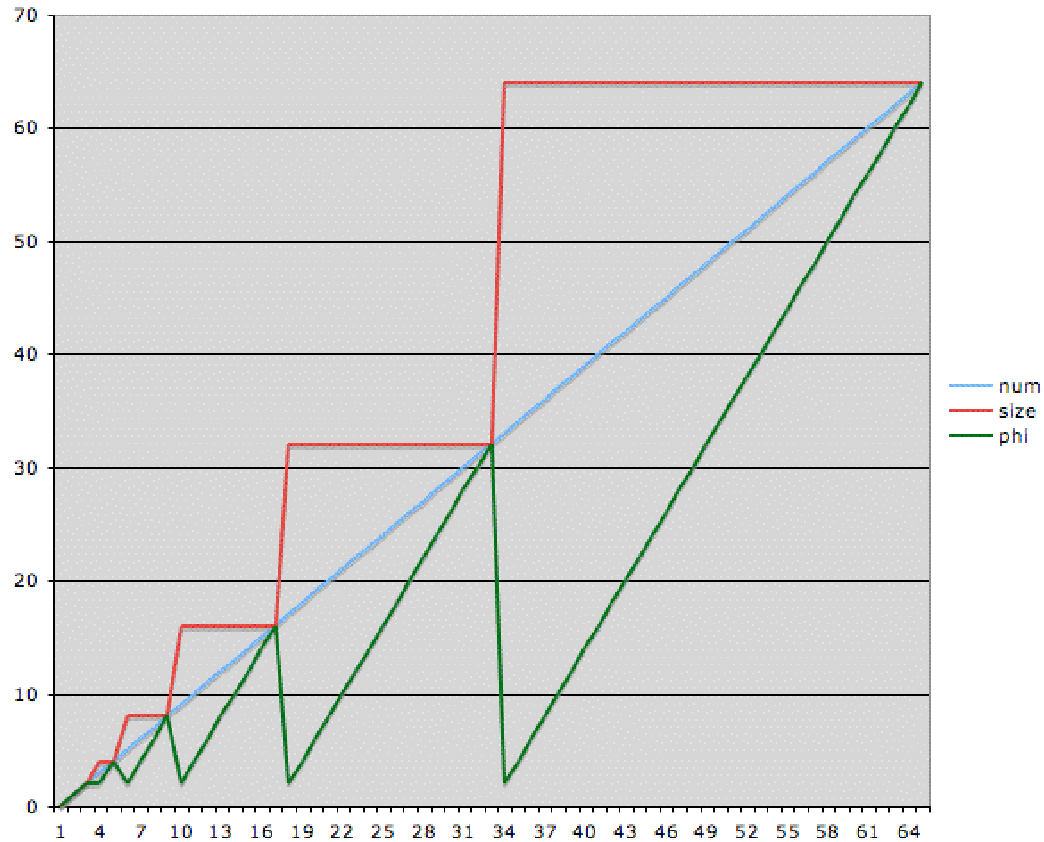
$\Phi(T) = 2 \cdot num[T] - size[T]$

SI HA: $\Phi(T_0) = 0$ (T_0 TABELLA VUOTA)

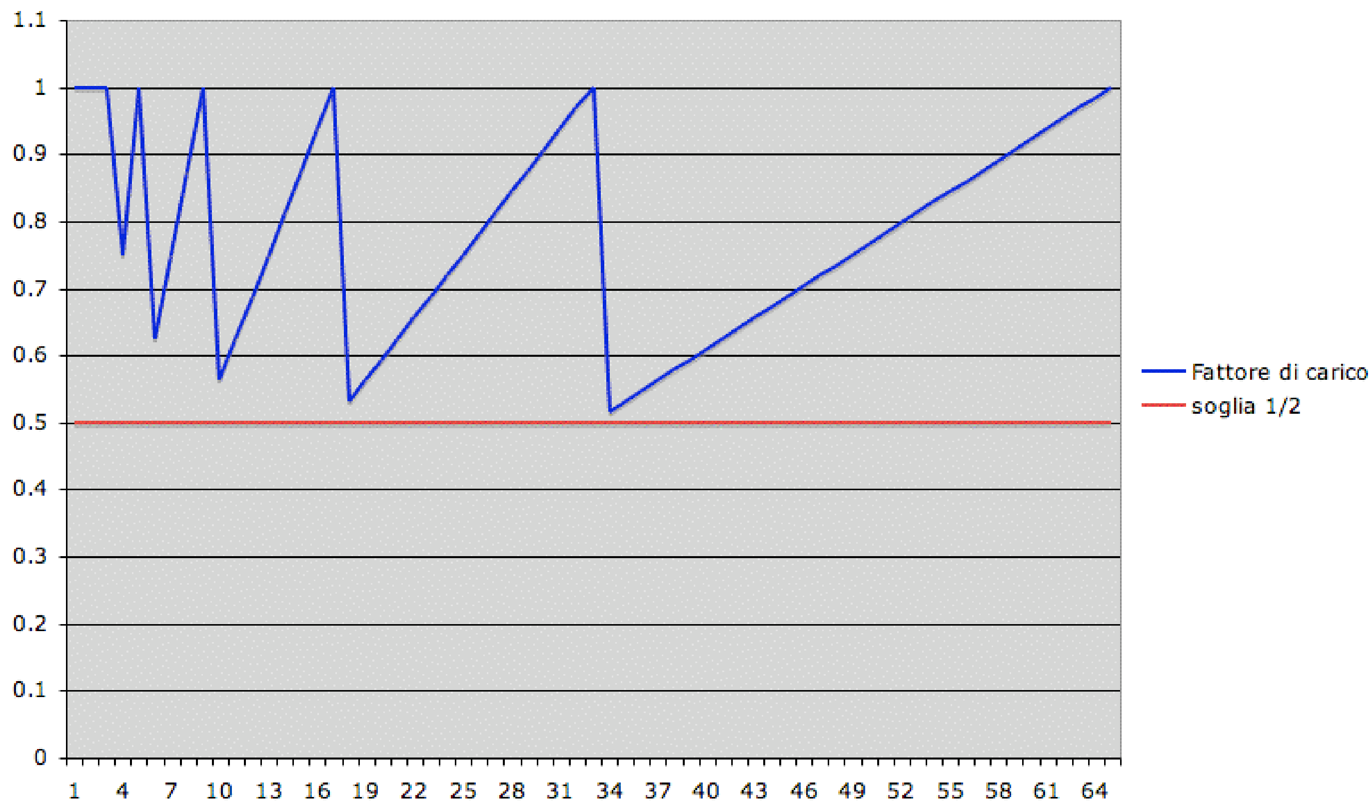
INOLTRE: $\frac{1}{2} size[T] \leq num[T]$

E PERTANTO $\Phi(T) \geq 0 = \Phi(T_0)$

CIOÈ IL METODO DEL POTENZIALE PUÒ ESSERE UTILIZZATO PER VALUTARE I COSTI AMMORTIZZATI



70
60
50
40
30
20
10
0
1
4
7
10
13
16
19
22
25
28
31
34
37
40
43
46
49
52
55
58
61
64
num
size
phi



1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1 4 7 10 13 16 19 22 25 28 31 34 37 40 43 46 49 52 55 58 61 64
Fattore di carico
soglia 1/2

INSERIMENTO SENZA ESPANSIONE

$$\hat{c}_{ins} = c_{ins} + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1})$$

$$= 1 + (2 \cdot n_i - s_i) - (2 n_{i-1} - s_{i-1})$$

$$= 1 + 2(\cancel{n_{i-1}} + 1) - \cancel{s_{i-1}} - 2\cancel{n_{i-1}} + \cancel{s_{i-1}}$$

$$= 3$$

$s_i = s_{i-1}$

$n_i = n_{i-1} + 1$

INSERIMENTO CON ESPANSIONE

$$\hat{c}_{ins} = c_{ins} + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1})$$

$$= n_i + (2 \cdot n_i - s_i) - (2 n_{i-1} - s_{i-1})$$

$$= \cancel{n_{i-1}} + 1 + 2(\cancel{n_{i-1}} + 1) - 2\cancel{n_{i-1}} - \cancel{2 n_{i-1}} + \cancel{n_{i-1}}$$

$$= 3$$

$s_i = 2 s_{i-1} = 2 n_{i-1}$

$n_i = n_{i-1} + 1$

PERTANTO $T(n) \leq 3n$

TABELLE DINAMICHE CON INSERIMENTI E CANCELLAZIONI

SI CONSIDERI LA SEGUENTE SEQUENZA DI OPERAZIONI SU UNA TABELLA DINAMICA CHE SI DIMEZZA QUANDO IL FATTORE DI CARICO SCENDE AL DI SOTTO DI $1/2$.

$n = 2^k$

$$\underbrace{I\ I \dots I}_{2^{k-1}}\ \overbrace{I\ C\ C\ I\ I\ C\ C\ I\ I \dots}^{2^{k-1}}$$

$n = s = 2^{k-1}$ $\qquad s = 2^k$ $\qquad s = 2^{k-1}$

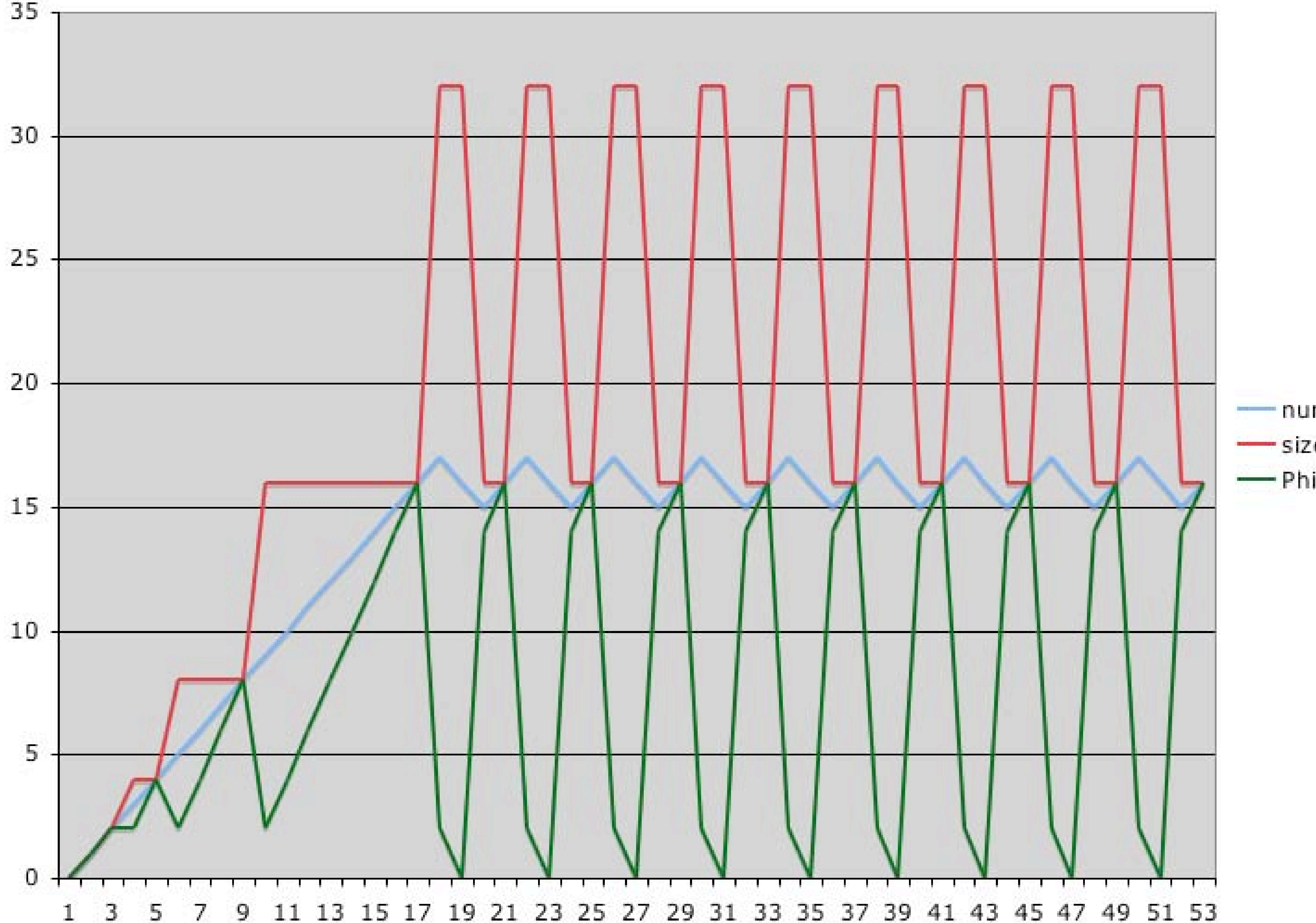
$T(2^{k-1}) \le 3 \cdot 2^{k-1}$

$2^{k-1} = m$

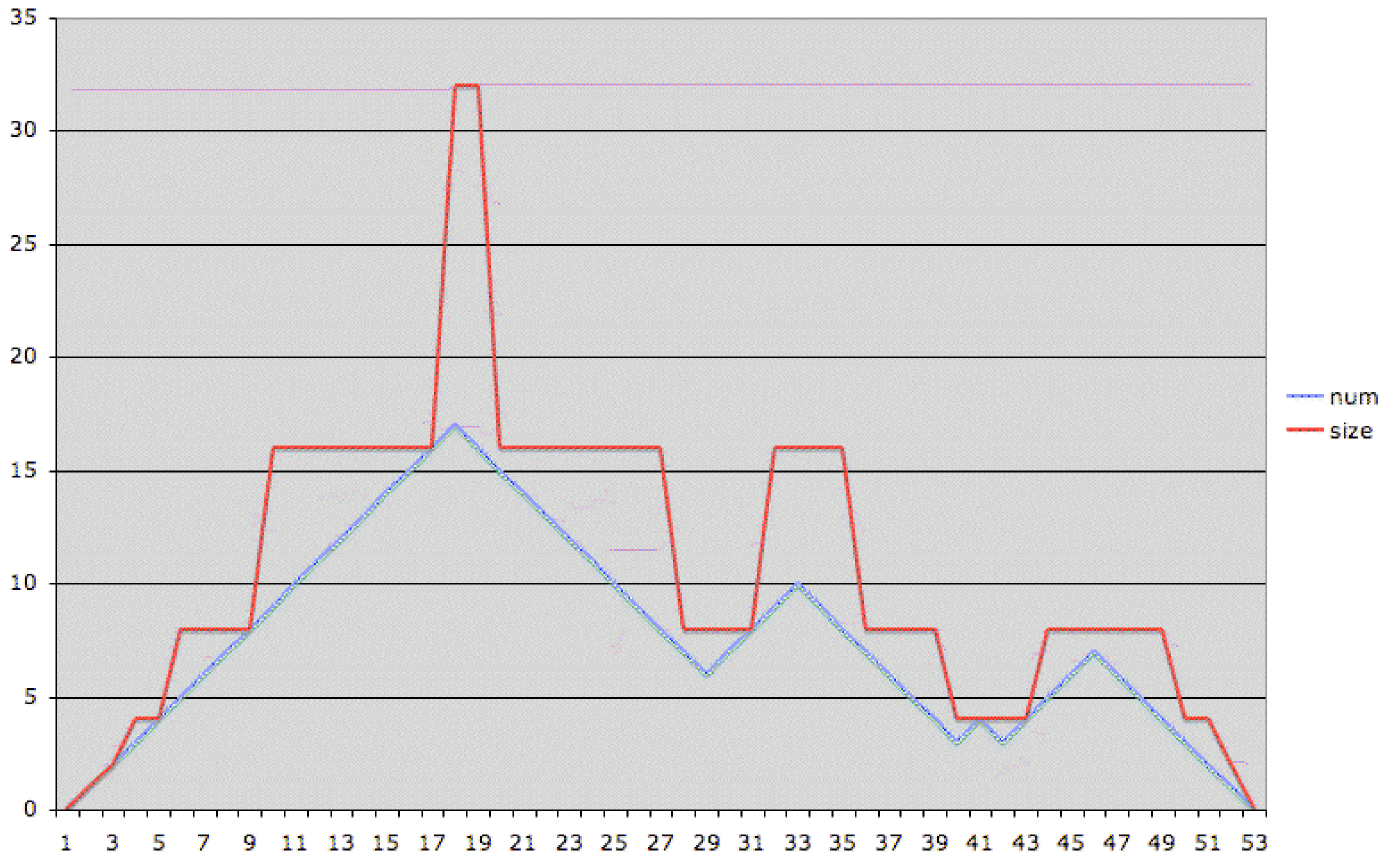
$$2^{k-1}\left\{\begin{array}{lll} c_{m+1} & = m+1 & \text{(ESPANSIONE)} \\ c_{m+2} & = 1 & \\ c_{m+3} & = m & \text{(CONTRAZIONE)} \\ c_{m+4} & = 1 & \\ c_{m+5} & = m+1 & \text{(ESPANSIONE)} \end{array}\right.$$

$$\frac{n^2}{8} = \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{4} = 2^{k-1} \cdot 2^{k-2} = m \cdot 2^{k-2} \longleftarrow 2^{k-1}$$

COSTO REALE $\Theta(n^2)$



35
30
25
20
15
10
5
0
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49 51 53
num
size
Phi



35
30
25
20
15
10
5
0
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49 51 53
num
size

CI ACCONTENTIAMO DI AVERE $\alpha(T) \geq \frac{1}{4}$

PONIAMO:

$$\Phi(T) = \begin{cases} 2\, num[T] - size[T] & \text{SE} \quad \alpha(T) \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} size[T] - num[T] & \text{SE} \quad \alpha(T) < \frac{1}{2} \end{cases}$$

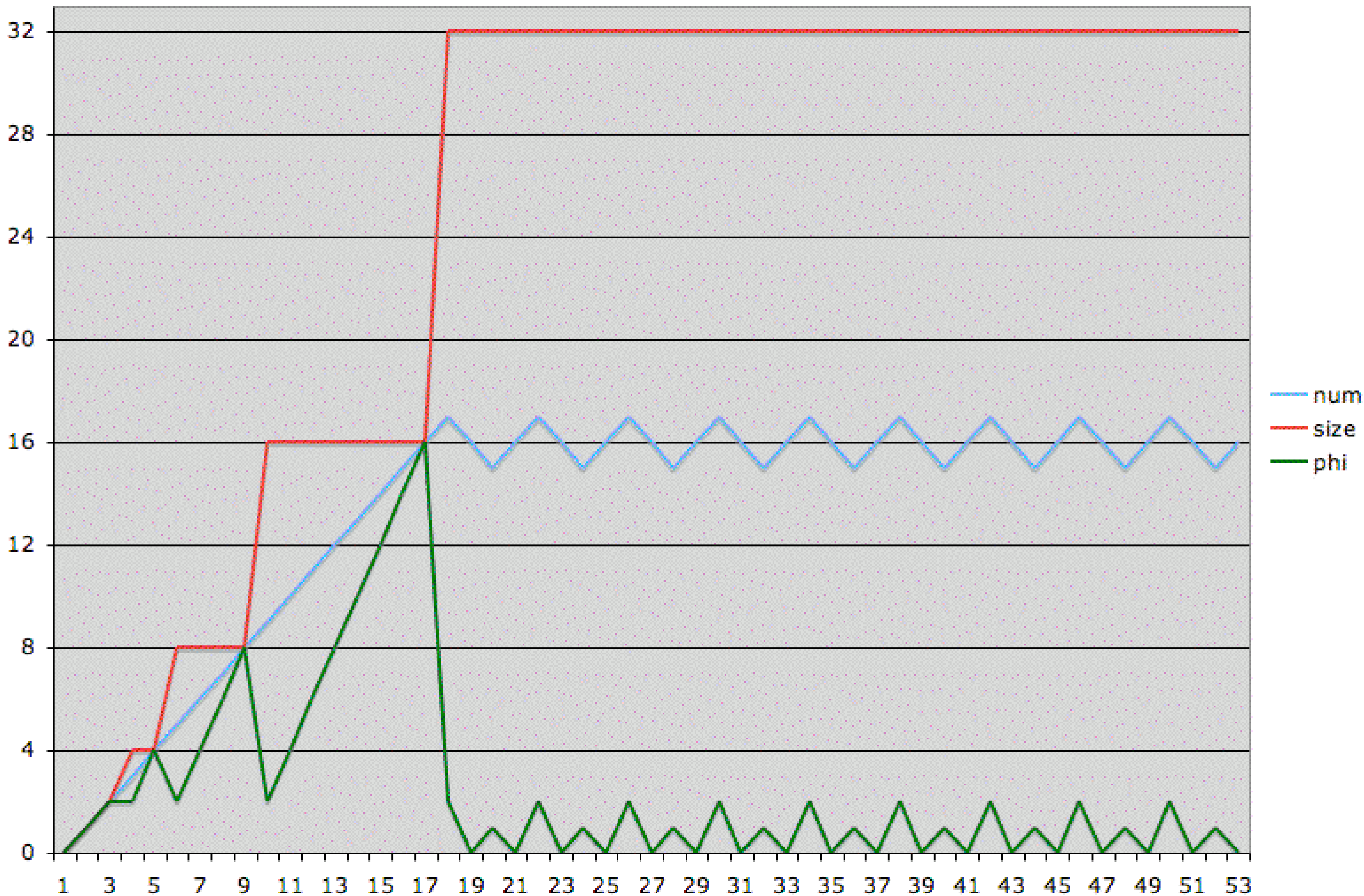
OSSERVIAMO CHE SE $\alpha(T) = \frac{1}{2}$:

- $\frac{num[T]}{size[T]} = \frac{1}{2}$, CIOE' $\frac{1}{2} size[T] - num[T] = 0$
- $\Phi(T) = 2\, num[T] - size[T] = 0$. PERTANTO

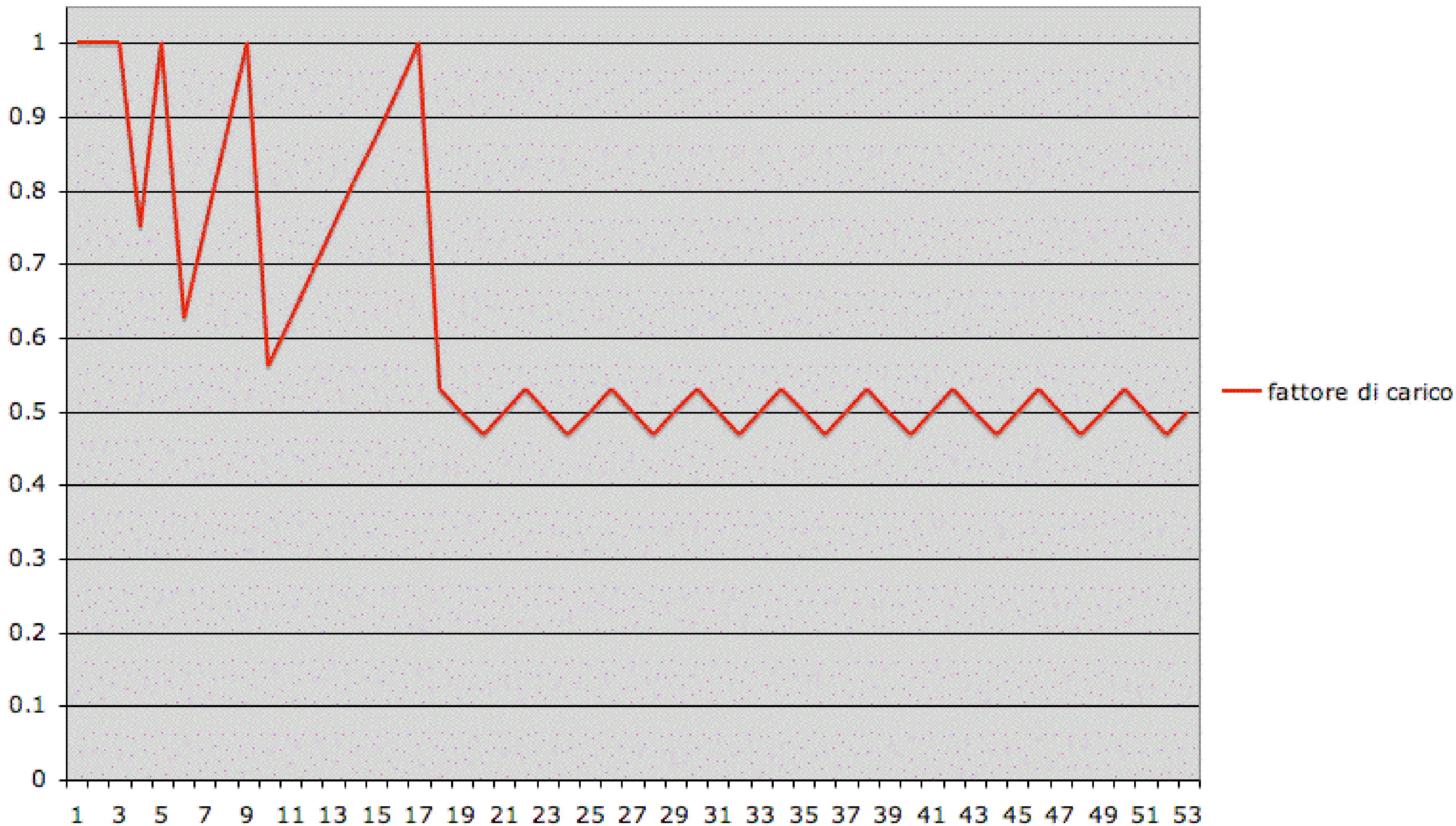
$$\Phi(T) = \begin{cases} 2\, num[T] - size[T] & \text{SE} \quad \alpha(T) \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} size[T] - num[T] & \text{SE} \quad \alpha(T) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

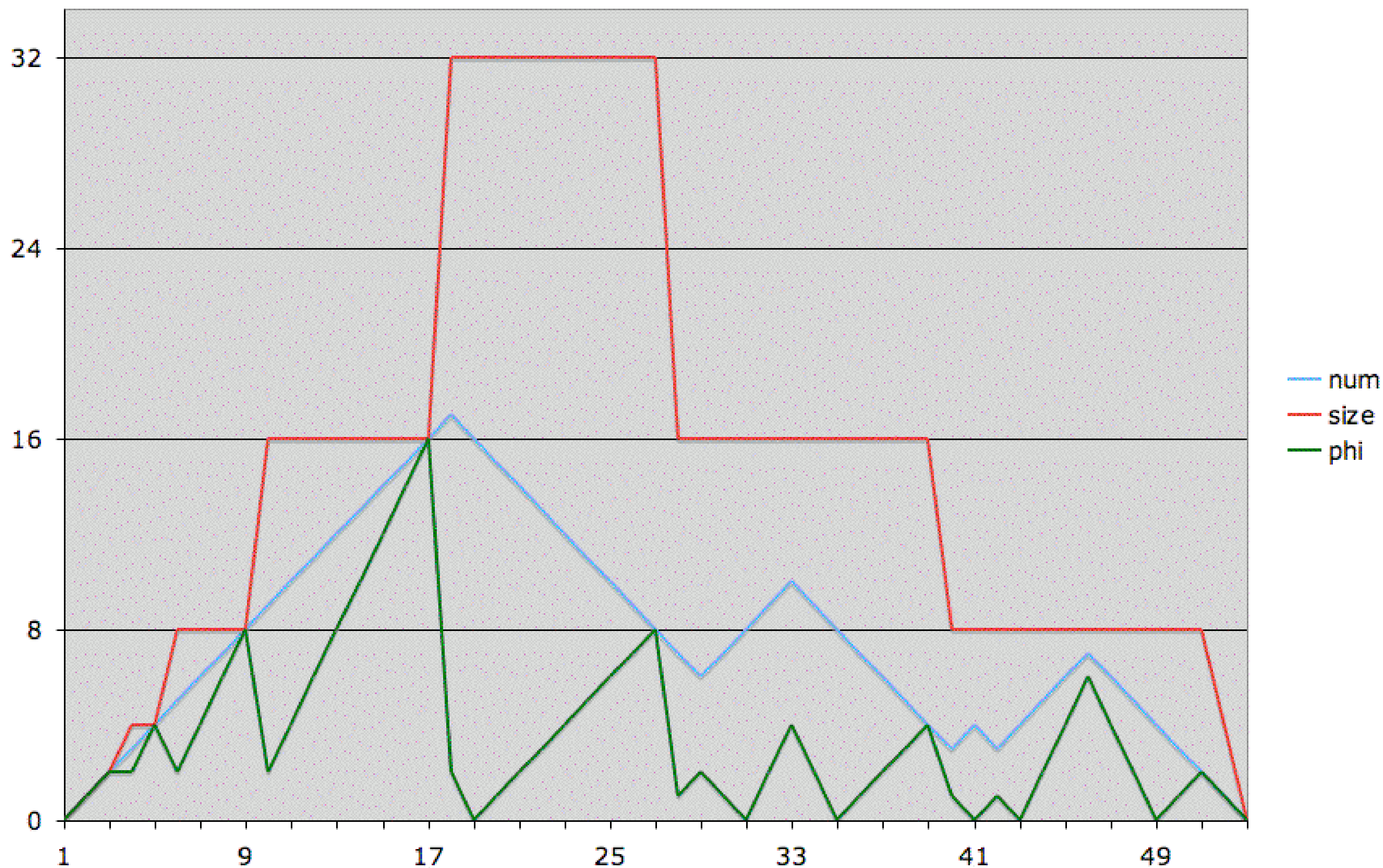
INOLTRE VALE SEMPRE

$\Phi(T) \geq \Phi(T_0) = 0$ (T_0 TABELLA VUOTA)

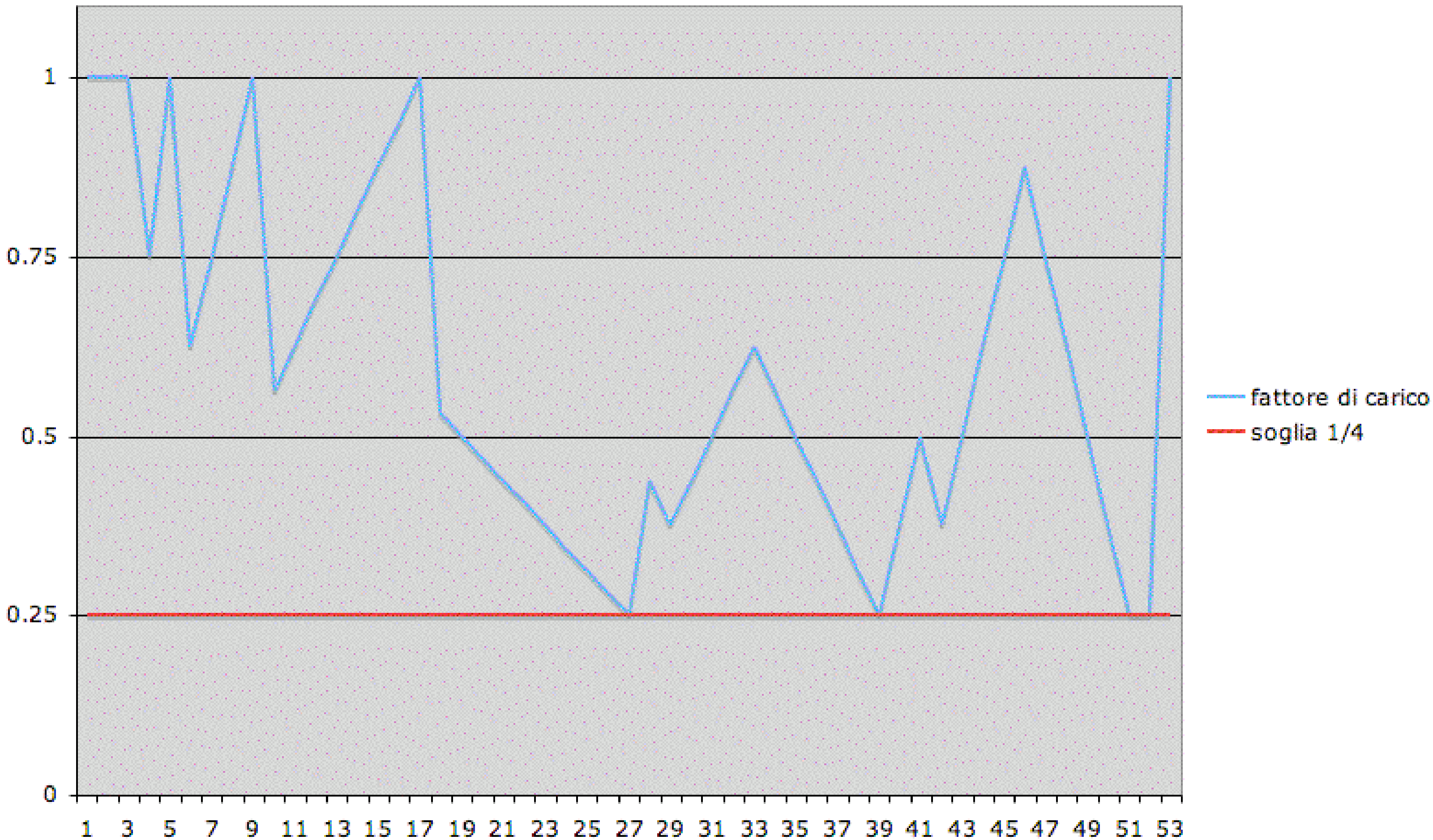


32
28
24
20
16
12
8
4
0
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49 51 53
num
size
phi


fattore di carico
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49 51 53



32
24
16
8
0
1
9
17
25
33
41
49
num
size
phi



1
0.75
0.5
0.25
0
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49 51 53
fattore di carico
soglia 1/4

CASO $\alpha(T) < \frac{1}{2}$

$s_i = s_{i-1}$

$n_i = n_{i-1} + 1$

$$\hat{c}_{ins} = c_{ins} + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1})$$
$$= 1 + \left(\frac{1}{2}s_i - n_i\right) - \left(\frac{1}{2}s_{i-1} - n_{i-1}\right)$$
$$= \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}s_{i-1}} - \cancel{n_{i-1}} - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}s_{i-1}} + \cancel{n_{i-1}}$$
$$= 0$$

CASO $\alpha(T) > \frac{1}{2}$

$s_i = s_{i-1}$

$n_i = n_{i-1} - 1$

$$\hat{c}_{canc} = c_{canc} + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1})$$
$$= 1 + 2n_i - s_i - (2n_{i-1} - s_{i-1})$$
$$= 1 + 2\cancel{n_{i-1}} - 2 - \cancel{s_{i-1}} - 2\cancel{n_{i-1}} + \cancel{s_{i-1}}$$
$$= -1$$

CASO $\frac{1}{4} < \alpha(T) \leq \frac{1}{2}$

$$s_i = s_{i-1}$$
$$n_i = n_{i-1} - 1$$

$$\begin{aligned}
\hat{c}_{canc} &= c_{canc} + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1}) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}s_i - n_i - \left(\tfrac{1}{2}s_{i-1} - n_{i-1}\right) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}\cancel{s_{i-1}} - \cancel{n_{i-1}} + 1 - \tfrac{1}{2}\cancel{s_{i-1}} + \cancel{n_{i-1}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

CASO $\alpha(T) = \frac{1}{4}$

$$s_i = \frac{s_{i-1}}{2}$$
$$n_i = n_{i-1} - 1$$
$$n_{i-1} = \tfrac{1}{4}s_{i-1}$$
$$n_i = \tfrac{1}{4}s_{i-1} - 1$$

$$\begin{aligned}
\hat{c}_{canc} &= c_{canc} + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1}) \\
&= n_{i-1} + \tfrac{1}{2}s_i - n_i - \left(\tfrac{1}{2}s_{i-1} - n_{i-1}\right) \\
&= \cancel{\tfrac{1}{4}s_{i-1}} + \cancel{\tfrac{1}{4}s_{i-1}} - \cancel{\tfrac{1}{4}s_{i-1}} + 1 - \cancel{\tfrac{1}{2}s_{i-1}} + \cancel{\tfrac{1}{4}s_{i-1}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

PERTANTO $\hat{c}_{ins} \leq 3$

$\hat{c}_{canc} \leq 2$

DA CUI $T(n) \leq 3n$

SCALARE I COSTI

- SUPPONIAMO CHE $c_{PUSH} = 1$

$c_{POP} = k$ (k COSTANTE)

$c_{MULTIPOP} = k \cdot s$ (s NUMERO DI POP)

- ANALIZZIAMO CON IL METODO DEL POTENZIALE UNA SEQUENZA DI n OPERAZIONI

$$\boxed{\phi(S') = |S'|}$$

$$\hat{c}_{PUSH} = c_{PUSH} + \Delta\phi = 2$$

$$\hat{c}_{POP} = c_{POP} + \Delta\phi = k - 1$$

$$\hat{c}_{MULTIPOP} = c_{MULTIPOP} + \Delta\phi = k \cdot s - s$$
$$= (k-1)s = \Theta(s)$$

PROBLEMA!

$$c_{PUSH} = 1$$

$$c_{POP} = k \qquad (k \text{ COSTANTE})$$

$$c_{MULTIPOP} = k \cdot s \qquad (s \text{ NUMERO DI POP})$$

- ANALIZZIAMO CON IL METODO DEL POTENZIALE UNA SEQUENZA DI n OPERAZIONI

$$\boxed{\Phi(S) = k|S| \; / \; \Phi(S) \geq \Phi(S_0) = 0}$$

$$\hat{c}_{PUSH} = c_{PUSH} + \Delta\Phi = k + 1$$

$$\hat{c}_{POP} = c_{POP} + \Delta\Phi = 0$$

$$\hat{c}_{MULTIPOP} = c_{MULTIPOP} + \Delta\Phi = k \cdot s - ks = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i = O(n)$$